

# FÓRMULAS PARA POLÍGONOS HIPERBÓLICOS DE ÁNGULOS RECTOS

J. J. Etayo y E. Martínez

Departamento de Álgebra, Universidad Complutense  
Departamento de Matemáticas Fundamentales, UNED

*Al Profesor Joaquín Arregui en agradecimiento  
a los años de trabajo y amistad.*

## Resumen

En un polígono hiperbólico con todos los ángulos rectos, se obtienen fórmulas explícitas para el coseno y el seno hiperbólicos de la longitud de un lado  $\ell$  en función de las longitudes de los  $N - 3$  lados distintos a  $\ell$  y a sus adyacentes. También se obtiene la cotangente hiperbólica de los adyacentes en función de los mismos  $N - 3$  lados.

## 1 Introducción

El estudio de polígonos hiperbólicos es especialmente importante en muchos campos de las Matemáticas. En particular, y por lo que respecta al ámbito en que se desarrolla la actividad investigadora de los autores, los polígonos hiperbólicos aparecen como región fundamental de grupos discretos de transformaciones del plano hiperbólico que permiten el estudio de determinadas superficies.

Así, las superficies de Riemann (orientables y sin borde) y de Klein (con borde, o sin borde no orientables) son expresables como cocientes del plano hiperbólico sobre grupos, respectivamente, Fuchsianos o cristalográficos no Euclídeos (grupos NEC).

Cada uno de estos grupos puede expresarse mediante una signatura formada por diversos conjuntos de números enteros no negativos y

un signo. Esta signatura determina una presentación del grupo en términos de generadores y relaciones, y una clase de regiones fundamentales canónicas para el mismo, los polígonos de Wilkie.

Para algunas de las aplicaciones de esta teoría de superficies y, correlativamente de curvas algebraicas, se hace necesario construir polígonos hiperbólicos en determinadas condiciones de regularidad, por ejemplo que tengan todos los ángulos iguales o que sean polígonos de ángulos rectos.

Un procedimiento para construir polígonos convexos con ángulos prefijados fue descrito por Beardon [Be1], de tal modo que para cada conjunto ordenado de ángulos el polígono resultante del método de Beardon es único salvo congruencia.

En [Be2] se estudian fórmulas para cuadriláteros, pentágonos y hexágonos convexos, y en [F] se estudian estos mismos tipos de polígonos incluyendo los no convexos o autointersecantes.

Por otra parte Buser en [Bu], utilizando transformaciones lineales de  $GL(3, \mathbb{R})$  obtiene todas las fórmulas anteriores para polígonos de hasta seis lados mediante productos de matrices. En ese trabajo se usa el modelo del hiperboloide para el plano hiperbólico.

Los autores abordaron en [Et-M] el problema general de la construcción de polígonos hiperbólicos convexos con ángulos prefijados. En ese trabajo se determinó el número de parámetros de los que depende la construcción, y para un determinado valor de los parámetros se obtiene, como caso particular, la construcción de Beardon. Como aplicación de este resultado se caracterizaron las clases del espacio de Teichmüller de los grupos NEC mediante polígonos de Wilkie con un número mínimo de lados.

En [C-M1] se estudió la construcción de polígonos de ángulos rectos en términos de las longitudes de  $N - 3$  lados, bien consecutivos o no consecutivos. En particular, se obtuvo un procedimiento para expresar el coseno hiperbólico de un lado  $l$  en función de los  $N - 3$  lados distintos de  $l$  y de los dos adyacentes a  $l$ . A partir de la fórmula obtenida para un polígono de  $N$  lados se puede obtener la correspondiente a un polígono de  $N + 2$  lados sustituyendo determinados términos en la fórmula anterior. Los casos de  $N$  par e impar proporcionan fórmulas ligeramente distintas. En ese trabajo se dan explícitamente las fórmulas para polígonos de hasta doce lados.

Los polígonos convexos de ángulos rectos (o rectos salvo uno) aparecen en trabajos sobre parametrizaciones de los espacios de Teichmüller o de Moduli de superficies de Riemann [C-M2] y de Klein [Es-M].

En este trabajo, utilizando el procedimiento de Buser reobtenemos las fórmulas de [C-M1] con la ventaja de que el producto de matrices  $3 \times 3$  puede ser realizado muy rápidamente por un ordenador. Además de la fórmula para el coseno hiperbólico del lado  $l$  se obtiene independientemente la correspondiente para el seno hiperbólico, y las de las cotangentes hiperbólicas de los lados adyacentes a  $l$ .

A continuación presentamos los preliminares necesarios sobre el modelo del hiperboloide y las transformaciones que utilizaremos.

## 2 Preliminares

Sea el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ :

$$H = \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha, \sqrt{1 + r^2}) \mid 0 \leq r, \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

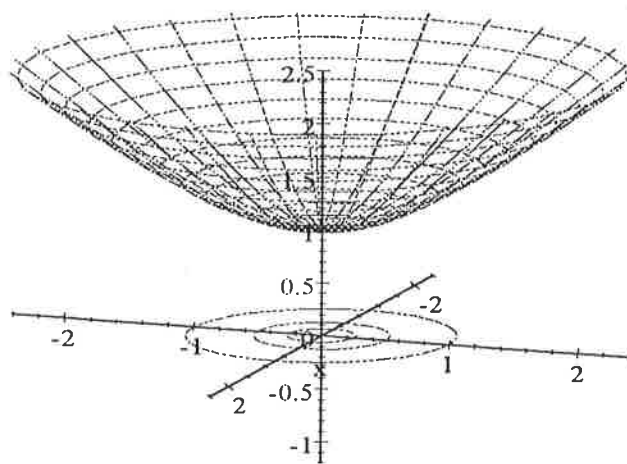


Fig.1

Las geodésicas son las intersecciones de  $H$  con los planos que pasan por el origen. En este modelo la distancia hiperbólica  $\rho$  entre un punto cualquiera y el punto  $O(0, 0, 1)$  viene dada por

$$\sinh \rho = r,$$

y de aquí:

$$\rho = \ln \left( r + \sqrt{r^2 + 1} \right).$$

Consideremos las siguientes transformaciones:

$$T_\rho = \begin{pmatrix} \cosh \rho & 0 & \sinh \rho \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \rho & 0 & \cosh \rho \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

y

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

La primera traslada el punto  $O$  a un punto situado a una distancia  $\rho$  de  $O$  a lo largo de la geodésica  $\alpha = 0$ . La segunda es un giro de ángulo  $\alpha$  alrededor del eje  $Z$ :

$$\begin{pmatrix} \cosh \rho & 0 & \sinh \rho \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \rho & 0 & \cosh \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh \rho \\ 0 \\ \cosh \rho \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues dado cualquier punto de  $P$  de coordenadas hiperbólicas  $(\rho, \alpha)$ , la transformación  $T_{-\rho}G_{-\alpha}$  lo transforma en el punto  $O$ .

La proyección estereográfica desde el punto  $(0, 0, -1)$  permite pasar desde  $H$  al modelo de Poincaré  $\Delta$  del disco unidad.

(Una magnífica ilustración de esta proyección aparece en la portada de [S])

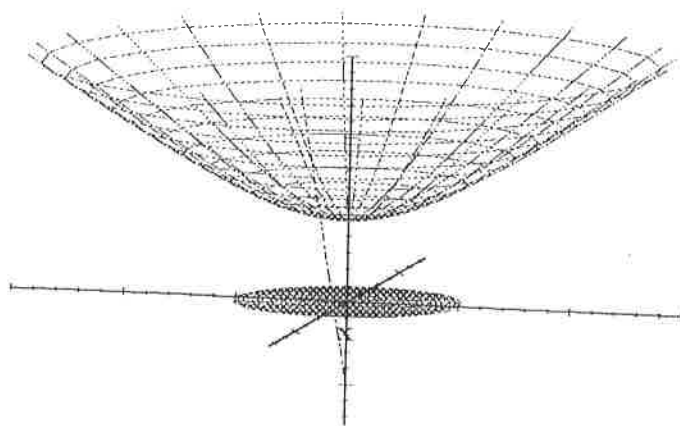


Fig. 2

La recta que pasa por los puntos  $(r \cos \alpha, r \sin \alpha, \sqrt{1+r^2})$  y  $(0, 0, -1)$  corta a  $\Delta$  en el punto  $(\frac{r}{1+\sqrt{1+r^2}} \cos \alpha, \frac{r}{1+\sqrt{1+r^2}} \sin \alpha, 0)$  y la distancia hiperbólica de este punto al centro del disco es

$$\begin{aligned} \delta &= \ln \left( \frac{1 + \frac{r}{1 + \sqrt{1+r^2}}}{1 - \frac{r}{1 + \sqrt{1+r^2}}} \right) \\ &= \ln \left( \frac{1 + \sqrt{(1+r^2)} + r}{1 + \sqrt{(1+r^2)} - r} \right) \\ &= \ln \left( \frac{1 + \cosh \rho + \sinh \rho}{1 + \cosh \rho - \sinh \rho} \right) \\ &= \ln (\cosh \rho + \sinh \rho) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Luego la distancia hiperbólica es igual en ambos modelos y las fórmulas trigonométricas son igualmente válidas.

Para más detalles sobre el modelo del hiperboloide véase [ R ].

### 3 Polígonos de ángulos rectos

Sea el polígono  $\mathcal{P}$  de lados  $l_1, l_2, \dots, l_n$  y todos sus ángulos rectos. Sin pérdida de generalidad supongamos que el polígono está situado sobre la geodésica  $\alpha = 0$  con el vértice entre los lados  $l_n$  y  $l_1$  en el origen  $O$  y el vértice entre los lados  $l_{n-1}$  y  $l_n$  en el punto  $(-\sinh \rho_n, 0, \cosh \rho_n)$  a una distancia  $\rho_n = |l_n|$  del origen (Figura 3)

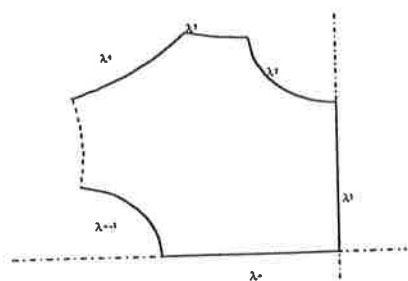


Fig. 3

Aplicando las transformaciones  $T_{\rho_n}$  y  $G_{\pi/2}$  el polígono  $\mathcal{P}$  pasa sucesivamente por las posiciones de las Figuras 4 y 5.

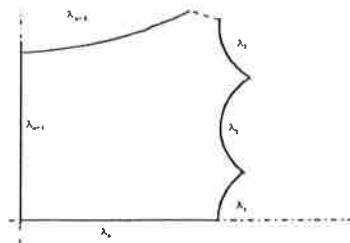


Fig. 4

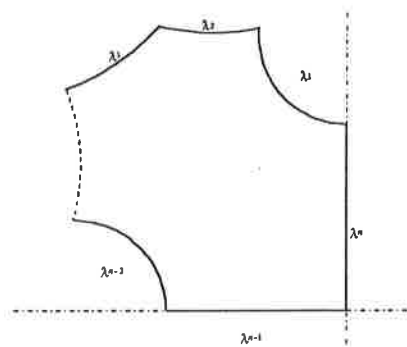


Fig. 5

Si se repite el proceso tenemos finalmente:

$$(G_{\pi/2} \cdot T_{\rho_1} \cdot G_{\pi/2} \cdot T_{\rho_2} \cdot \dots \cdot G_{\pi/2} \cdot T_{\rho_n})(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$$

y de aquí

$$T_{\rho_1} \cdot G_{\pi/2} \cdot T_{\rho_2} \cdot \dots \cdot G_{\pi/2} \cdot T_{\rho_{n-1}} = G_{\pi/2}^{-1} \cdot T_{-\rho_n} \cdot G_{\pi/2}^{-1}.$$

Antes de ver algunas fórmulas particulares cambiamos la notación para usar la misma que en [ C-M1] y que describimos a continuación. La denominación de los lados es ligeramente distinta para un polígono con un número impar de lados que para uno con número par. Utilizaremos la misma letra para designar el lado y su longitud hiperbólica. El lado enésimo, y para el cual vamos a hallar las fórmulas, se denomina lado  $z$ , los otros lados se denominan según las Figuras 6 y 7, donde  $N = 2n - 1$  o  $N = 2n$ , con  $n \geq 3$ .

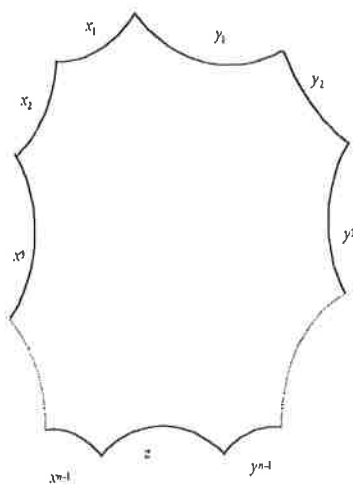


Fig. 6



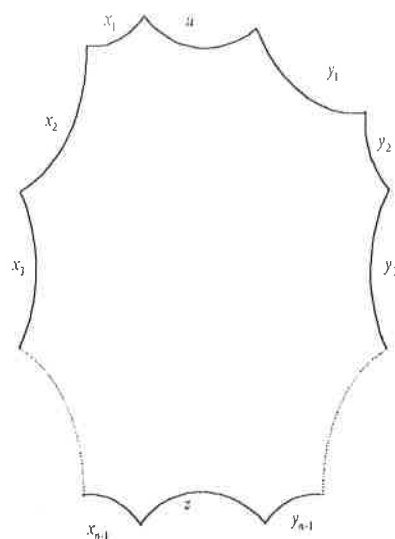


Fig. 7

Designaremos por  $C_i^x$  y  $S_i^x$  el  $\cosh x_i$  y el  $\sinh x_i$ , y análogamente para los lados  $y_i$ . Las matrices de (2.1) y (2.2) las reescribimos:

$$X(i) = \begin{pmatrix} C_i^x & 0 & S_i^x \\ 0 & 1 & 0 \\ S_i^x & 0 & C_i^x \end{pmatrix}, \quad Y(i) = \begin{pmatrix} C_i^y & 0 & S_i^y \\ 0 & 1 & 0 \\ S_i^y & 0 & C_i^y \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & \sinh u \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh u & 0 & \cosh u \end{pmatrix},$$

y

$$G_{\pi/2} = G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean las matrices producto:

$$H(n) = Y(n-1) \cdot G \cdot \dots \cdot Y(1) \cdot G \cdot X(1) \cdot \dots \cdot G \cdot X(n-1),$$

para un polígono con  $N = 2n - 1$  lados, y

$$H(n) = Y(n-1) \cdot G \cdot \dots \cdot Y(1) \cdot G \cdot U \cdot G \cdot X(1) \cdot \dots \cdot G \cdot X(n-1),$$

para un polígono con  $N = 2n$  lados.

Estamos en condiciones de enunciar el primer resultado. En lo que sigue siempre será  $n \geq 3$ .

**Proposición 1** *El  $\cosh z$  en función de los  $N - 3$  lados distintos del lado  $z$  y de sus dos adyacentes viene dado por el término  $(H(n-1))_{1,1}$ .*

**Demostración.** Desarrollamos el producto  $H(n)$  e igualamos con la matriz  $G^{-1}T_{-z}^{-1}G^{-1}$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh z & 0 & -\sinh z \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh z & 0 & \cosh z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh z & \sinh z \\ 0 & -\sinh z & \cosh z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $(H(n))_{2,2} = -\cosh z$ . Por otra parte, si escribimos

$$H(n-1) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

se tiene que la matriz

$$H(n) = Y(n-1) \cdot G \cdot H(n-1) \cdot G \cdot X(n-1),$$

es la matriz (3.1) donde hemos eliminado los subíndices  $n-1$  por razones tipográficas.

$$G \cdot X(n-1),$$

$$\dots G \cdot X(n-1),$$

sultado. En lo que

lados distintos del  
vino  $(H(n-1))_{1,1}$ .

o) e igualamos con

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

escribimos

$$(-1),$$

$$\begin{pmatrix} (-C^y e + S^y h) C^x & C^y d - S^y g & (-C^y e + S^y h) S^x \\ + (-C^y f + i S^y) S^x & & + (-C^y f + i S^y) C^x \\ b C^x + c S^x & -a & b S^x + c C^x \\ (-S^y e + C^y h) C^x & S^y d - C^y g & (-S^y e + C^y h) S^x \\ + (-S^y f + i C^y) S^x & & + (-S^y f + i C^y) C^x \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

y, por tanto,  $\cosh z = -(H(n))_{2,2} = (H(n-1))_{1,1}$ . ■

Como ejemplo de aplicación del resultado anterior obtenemos la fórmula del decágono,  $N = 10$ ,  $n = 5$ , así pues:

$$H(4) = Y(3) \cdot G \cdot Y(2) \cdot G \cdot Y(1) \cdot G \cdot U \cdot G \cdot X(1) \cdot G \cdot X(2) \cdot G \cdot X(3).$$

Calculamos el término  $(H(4))_{1,1}$ :

$$\begin{aligned} (H(4))_{1,1} = & -C_3^{x+y} C_1^{x+y} + C_3^x C_1^x S_3^y C_2^y S_1^y + C_3^x S_1^x S_3^y S_2^y \sinh u \\ & + C_3^{x+y} S_1^{x+y} \cosh u - C_3^x S_1^x (\cosh u) S_3^y C_2^y C_1^y \\ & + S_3^{x+y} S_2^{x+y} \cosh u + S_3^x S_2^x (\sinh u) C_3^y S_1^y \\ & - S_3^{x+y} S_2^x (\sinh u) C_2^y C_1^y + S_3^x C_2^x S_1^x C_3^y C_1^y \\ & - S_3^{x+y} C_2^{x+y} S_1^{x+y} - S_3^{x+y} C_2^x C_1^x S_2^y \sinh u \\ & - S_3^x C_2^x C_1^x (\cosh u) C_3^y S_1^y + S_3^{x+y} C_2^{x+y} C_1^{x+y} \cosh u. \end{aligned}$$

y tras simplificar y agrupar, el término  $(H(4))_{1,1}$  queda igual a

$$\begin{aligned} & (S_3^x S_3^y S_2^x S_2^y + (-C_3^x S_1^x + S_3^x C_2^x C_1^x) (-C_3^y S_1^y + C_1^y C_2^y S_3^y)) \cosh u \\ & - (S_2^y S_3^y (-S_1^x C_3^x + S_3^x C_2^x C_1^x) + S_2^x S_3^x (S_3^y C_2^y C_1^y - C_3^y S_1^y)) \sinh u \\ & - (C_3^x C_1^x - S_3^x C_2^x S_1^x) (C_3^y C_1^y - S_1^y C_2^y S_3^y). \end{aligned}$$

Se puede comprobar que coincide, como era de esperar, con el resultado de [C-M1] subsanando la errata tipográfica de éste en la última fila donde aparece el término  $C_1^x C_2^x$  en lugar de  $C_1^x C_3^x$ .

**Proposición 2** *La correspondiente fórmula para el  $\sinh z$  es*

$$\sinh z = \sqrt{\left((H(n))_{1,3}\right)^2 - \left((H(n))_{1,2}\right)^2} = \sqrt{\left((H(n))_{3,1}\right)^2 - \left((H(n))_{2,1}\right)^2}.$$

**Demostración.** De (3.1) vemos que

$$\begin{aligned}(H(n))_{2,3} &= \sinh z, \\ (H(n))_{2,1} &= 0.\end{aligned}$$

Eliminando  $C_{n-1}^x$  y  $S_{n-1}^x$  se obtiene la expresión deseada. ■

**Corolario 3** *Para todo  $n \geq 3$  se tienen las siguientes igualdades:*

$$\coth x_{n-1} = \frac{-(H(n-1))_{1,3}}{(H(n-1))_{1,2}},$$

y

$$\coth y_{n-1} = \frac{(H(n-1))_{3,1}}{(H(n-1))_{2,1}}.$$

**Demostración.** Basta ver que en la matriz (3.1) los términos  $(H(n))_{1,2}$  y  $(H(n))_{2,1}$  deben ser nulos. ■

**Corolario 4** *El  $\cosh z$  se puede obtener también mediante la siguiente expresión:*

$$\cosh z = \frac{(H(n-1))_{3,1}(H(n-1))_{2,3} - (H(n-1))_{3,3}(H(n-1))_{2,1}}{(H(n-1))_{3,1}(H(n-1))_{3,2} - (H(n-1))_{2,2}(H(n-1))_{2,1}}.$$

**Demostración.** En la matriz (3.1) se tiene

$$\begin{aligned}(H(n))_{1,1} &= -1, \\ (H(n))_{1,3} &= 0, \\ (H(n))_{3,1} &= 0, \\ (H(n))_{3,3} &= \cosh z,\end{aligned}$$

y de aquí resulta

$$\cosh z = \frac{-S_{n-1}^y (H(n-1))_{2,3} + C_{n-1}^y (H(n-1))_{3,3}}{C_{n-1}^y (H(n-1))_{2,2} - S_{n-1}^y (H(n-1))_{2,3}}.$$

Eliminando  $S_{n-1}^y$  y  $C_{n-1}^y$  con las expresiones obtenidas en el Corolario 3, se obtiene la igualdad del enunciado. ■

## Referencias

- [Be1] BEARDON, A. F.: Hyperbolic polygons and Fuchsian groups. J. London Math. Soc. (2) **20** (1979) 247-254.
- [Be2] BEARDON, A. F.: *The Geometry of Discrete Groups*. GTM **91**. Springer-Verlag, 1983.
- [Bu] BUSER, P.: *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, 1992.
- [C-M1] COSTA, A. F., MARTÍNEZ, E.: On hyperbolic right-angled polygons. Geometriae Dedicata **58** (1995) 313-326.
- [C-M2] COSTA, A. F., MARTÍNEZ, E.: Parametrization of the Moduli Space of hyperelliptic and symmetric Riemann surfaces. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Mathematics **22** (1997) 75-88.
- [Es-M] ESTRADA, B., MARTÍNEZ, E.: On q-hyperelliptic k-bordered tori. (Preprint).

- [ Et-M] ETAYO, J. J., MARTÍNEZ, E.: Hyperbolic polygons and NEC groups. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **104** (1988) 261-272.
- [ F] FENCHEL, W.: *Elementary Geometry in Hyperbolic Spaces*. *Studies in Mathematics* **11**. Walter de Gruyter 1989.
- [ R] REYNOLDS, W. F.: Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid. *The American Mathematical Monthly*. Vol. **100**, n. 5 (1993) 442-455.
- [ S] STILWELL, J.: *Sources of Hyperbolic Geometry*. *History of Mathematics* **10**. American Math. Soc. and London Math. Soc. 1996.